数理解析研究所講究録
21 巻 1967 年 20-27

$\tau_2(CP^n)$ の Pontrjagin 類とその応用

九大 理　　鈴木 治夫

K-理論におけるSymmetric power operation は exterior Power operation と同様な方法で定義される。これを用いれば，微分可能多様体の高次接ベクトル・バンドルは，K-理論においては，単に多様体の接ベクトル・バンドルだけで表わされる。しかも，この高次接ベクトル・バンドルのK-理論における表示を適切にとることによって，その特性類等を求めることが容易になる。実際に，この方法で n 次元複素射影空間の実微分可能構造に関する，2次接ベクトル・バンドルの，Pontrjagin類を計算し，その Stiefel-Whiteney 類とあわせて，n 次元複素射影空間から，実アファイン空間の中への，2次の特異点をもたないはめこみ（埋めこみ）についての応用を述べる。（[3] 参照）

1. K-理論と高次接ベクトル・バンドル

X を位相空間とし，Λ を実数体 $\mathbb{R}$，又は複素数体 $\mathbb{C}$ とする

$K_\Lambda(X)$ において，symmetric i-th power operation を，O^i（$i=0,1,2,\cdots$）とかく。O^i は次の性質をもつ。（[1]，[2] 参照。）任意の x，$y \in K_\Lambda(X)$ に対して，

(1)
$$\text{(A)} \quad O^0 x = 1$$
$$\text{(B)} \quad O^1 x = x$$
$$\text{(C)} \quad O^i(x+y) = \sum_{j=0}^{i} (O^j x)(O^{i-j} y).$$

X の上のベクトルバンドルと，それによって定まる，$K_\Lambda(X)$ の元とを，同一の記号で表わすことにする。

以下，X を微分可能多様体とする。次に述べることは，実微分可能（C^∞），又は複素解析的多様体のいずれの場合にも適用できるので，特に区別しないで，微分可能という言葉で表わしておく。微分可能写像は場合に応じて，実微分可能（C^∞）又は holomorphic な写像と考える。U を X の一つの座標近傍，その座標関数を（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）とする。U の上の微分可能関数（値は場合に応じて，実数又は複素数）の全体から成る環を $F(U)$ とかく。$x \in U$ とするとき，$\partial^k/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}|x$ は，$f \in F(U)$ に $\partial^k f/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}|x$ を対応させる linear functional とする。$\tau_p(X)_x$ を，一次独立な linear functionals，$\{\partial^k/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}|x \mid 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$ によって張られる Λ ベクトル空間とし，$\tau_p(X) = \bigcup_{x \in X} \tau_p(X)_x$

とおく。$\tau_p(X)$は，Xの上の微分可能なΛベクトル・バンドルとなる。XからΛへの，xを0に写す関数の p-jets 全体を$J^p(X)_x$とかく。$J^p(X)=\bigcup_{x\in X}J^p(X)_x$は，p-jets のバンドルであるが，$\tau_p(X)$は，$J^p(X)$の双対ベクトル・バンドルとなる。即ち，$\tau_p(X)\cong J^p(X)^*$.

X，Yを微分可能多様体（同時に実又は複素多様体），$f;X\to Y$を微分可能写像とするとき，fの右側からの関数結合を用いて，Λ-ベクトル・バンドルの微分可能な homomorphism，$\tau_p(f)\ ;\ \tau_p(X)\to\tau_p(Y)$が得られる。これは$f$の$p$次微分とよばれるものである。

$I_{p-1}\ ;\ \tau_{p-1}(X)\to\tau_p(X)$を自然な包含写像，$\tilde{\omega}_{p-1}\ ;\ \tau_p(X)\to\tau_p(X)/\tau_{p-1}(X)$を projection homomorphism とする。

$$m_{p-1}(\partial/\partial x_{i_1}|_x\circ\cdots\circ\partial/\partial x_{i_p}|_x)=\tilde{\omega}_{p-1}(\partial^p/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_p}|_x)$$

とおくと，m_{p-1}はΛベクトル・バンドルの微分可能な同型，$\odot^p\tau_1(X)\cong\tau_p(X)/\tau_{p-1}(X)$を定める。

$$m_{p-1}^{-1}\tilde{\omega}_{p-1}=P_{p-1}\quad;\quad\tau_p(X)\to\odot^p\tau_1(X)$$

とおくことによって，Λ-ベクトル・バンドルの short exact 列

$$(2)_p\qquad 0\to\tau_{p-1}(X)\xrightarrow[I_{p-1}]{}\tau_p(X)\xrightarrow[P_{p-1}]{}\odot^p\tau_1(X)\longrightarrow 0$$

が得られる。微分可能写像$f\ ;\ X\to Y$に対して，short exact 列の homomorphism，

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tau_{p-1}(X) & \xrightarrow{I_{p-1}} & \tau_p(X) & \xrightarrow{P_{p-1}} & O^p\tau_1(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{p-1}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_p(f)} & & \downarrow{\scriptstyle O^p\tau_1(f)} & & \\
0 & \longrightarrow & \tau_{p-1}(X) & \xrightarrow{I_{p-1}} & \tau_p(X) & \xrightarrow{P_{p-1}} & O^p\tau_1(Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

がなりたつ。

$D_Y^{(k)}$; $\tau_{k+1}(Y) \longrightarrow \tau_k(Y)$ を，Y に対する $(Z)_{k+1}$ の，微分可能な splitting と仮定する。Y が実微分可能多様体ならば，C^∞- splitting は常に存在し，Y の上の dissections（symmetric linear connections の高次接ベクトルバンドルへの一般化）と一対一に対応する。（[5] 参照）

$$D_p = D_Y^{(1)} \cdots D_Y^{(p-1)} \ ; \ \tau_p(Y) \longrightarrow \tau_1(Y)$$

とおき，これと $\tau_p(f)$ とを結合して得られる，微分可能 homomorphism， $D_p\tau_p(f)$; $\tau_p(X) \longrightarrow \tau_1(Y)$ を（$D_Y^{(k)}$, $k=1,2\cdots$）に関する，f の p 次の osculating mapping という。各点 $x \in X$ に対し，$D_p\tau_p(f)_x$; $\tau_p(X)_x \longrightarrow \tau_1(Y)_{f(x)}$ が maximal rank ならば，f を $(D_Y^{(k)})$ に関する，p 次の non-singular mapping という。X，Y の次元をそれぞれ n，N とする。また，$\nu(n,p) = \binom{n+p}{p} - 1$ とおく。f がはめこみで，$p \geq 2$，$N \geq \nu(n,p)$，$D_p\tau_p(f)_x$ が maximal rank でないとき，x を次数 $\leq p-1$ の inflection point ということができる。特に，$Y = \Lambda^N$ ならば，D_Y^k として自然な splitting をとるこ

とができる。はめこみ，$X \to \Lambda^N$ が，この splitting に関して，p次の non-singular mapping であるならば，これをXから Λ^N への p次の non-singular なはめこみという。

2. CP^n の高次接ベクトルバンドル

Xを微分可能多様体とするとき，short exact 列 $(2)_p$ は，Λ-ベクトル・バンドルの（連続的な）homomorphism に関して常に split するから，次の定理が得られる。

定理1. $K_\Lambda(X)$ において

(3) $$\tau_p(X) = O^p(\tau_1(X)+1)-1 \qquad p=1,2,\cdots.$$

任意の整数 $k>0$ に対して

$$\tau_p(X) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{k-1}{i} O^{p-i}(\tau_1(X)+k)-1.$$

（[2]，[4] 参照）

この定理によって，実又は複素の高次接ベクトル・バンドルの種々の特性類等が求められる。n次元複素射影空間の実p次接ベクトル・バンドル $\tau_p(CP^n)$ に関して，定理は次のようになる。

系. $KO(CP^n)$ において，η を CP^n の上の Hopf 直線バンドルによって定まる，実2次元ベクトル・バンドルの元とするとき，

(4) $$\tau_p(CP^n) = O^p((n+1)\eta) - O^{p-1}((n+1)\eta), \quad p=1,2,\cdots.$$

(4)を用いて，$\tau_2(CP^n)$ の Pontrjagin 類を求めてみる。$\tau_p(RP^n)$ の Stiefel-Whitney 類，CP^n の複素1次接ベクトルバンドルの Chern 類等に関しては，[2]，[4] を参照されたい。

$p=2$ の場合，(4)から，$KO(CP^n)$ において

(5) $$\tau_2(CP^n) = \binom{n+1}{2}\eta^2 + (n+1)O^2\eta - (n+1)\eta - 1.$$

Total Pontrjagin 類をPで表わし，g を $H^2(CP^n; Z)$ の自然な生成元とするとき，

(6) $$P(\eta) = 1+g^2$$

$H^*(CP^n; Z)$ は torsions をもたないから，

(7) $$P(\eta^2) = 1+4g^2$$

が得られる。η_c，$(O^2\eta)_c$ を η，$O^2\eta$ の複素化とし，total Chern類をCで表わすとき，Pontrjagin 類の定義によって

$$C(\eta_c) = 1-g^2$$

となるから，

$$C((O^2\eta)_c) = C(O^2(\eta_c)) = 1-4g^2.$$

従って

(8) $$P(O^2\eta) = 1+4g^2$$

再び，$H^*(CP^n; Z)$ が torsions を持たないことから。Pontrjagin類に対して，Whitney 和の式が成りたち，(5)(6)，(7) および(8) をあわせて，次の結果が得られる。

定理2. g を $H^2(CP^n;Z)$ の自然な生成元とするとき，

(9) $$P(\tau_2(CP^n)) = (1+4g^2)^{\binom{n+2}{2}}(1+g^2)^{-(n+1)}。$$

一方，$\tau_2(CP^n)$ の total Stiefel-Whiteney 類は $\bar{g}=g \bmod 2$ とおくとき，$H^*(CP^n;Z_2)$ において，

(10) $$W(\tau_2(CP^n)) = (1+\bar{g})^{-(n+1)}。$$

正整数 $s_W(n)$，$d_W(n)$，$s_P(n)$，$d_P(n)$ を次のように定める。

$$s_W(n) = \max\{i \mid 0<i\leqq n,\ \tbinom{n+i}{i}\neq 0 \bmod 2\}$$

または，このような i が存在しないとき．0．

$$d_W(n) = \max\{i \mid 0<i\leqq n,\ \tbinom{n+1}{i}\neq 0 \bmod 2\}$$

または，このような i が存在しないとき，0．

$$s_P(n) = \max\{i \mid 0<i\leqq n,\ \sum_{j=0}^{i}(-1)^j 4^{i-j}\tbinom{n+j}{j}\tbinom{\binom{n+2}{2}}{i-j}\neq 0\}$$

$$d_P(n) = \max\{i \mid 0<i\leqq n,\ \sum_{j=0}^{i}(-1)^j 4^{i-j}\tbinom{\binom{n+2}{2}+j-1}{j}\tbinom{n+1}{j}\neq 0\}$$

双対特性類はバーをつけて表わすことにすれば，(9)，(10) によって，$W_{2s_W(n)}(\tau_2(CP^n))\neq 0$，$\overline{W}_{2d_W(n)}(\tau_2(CP^n))\neq 0$，$P_{4s_P(n)}(\tau_2(CP^n))\neq 0$．$\overline{P}_{4d_P(n)}(\tau_2(CP^n))\neq 0$ となるから，次の結果が得られる。

定理3. k が整数で，

(11) $$-2\max\{s_P(n),\ s_W(n)\} < k < 2\max\{d_P(n),\ d_W(n)\}$$

ならば, CP^n から $\mathbb{R}^{\binom{2n+2}{2}+k-1}$ への, 2次の non-singular なはめこみ（埋めこみ）は存在しない。

言いかえれば, (11) の k に対して, はめこみ（埋めこみ）$CP^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\binom{2n+2}{2}+k-1}$ は, 少くとも一つ, 1次の infection point をもつ。

文　献

[1] M. Atiyah, K-theory, Notes by D.W. Anderson, Harvard Univ. Lectures, Camb. Mass. 1964.

[2] H. Suzuki, Bounds for dimensions of odd order non-singular immersions of RP^n. Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 269-275.

[3] ________, Characteristic classes of some higher order tangent bundles of complex projective spaces, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966) 386-393.

[4] ________, Symmetric power operations in K-theory and their applications, Topology Katata Symposium, Katata, Japan (1966), 出版予定

[5] E. Feldman, The geometry of immersions. I, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 185-224.